



**INAOE**

## **Segmentación Markoviana Usando Modelos de Textura**

**Erika Danaé López-Espinoza, Leopoldo Altamirano Robles**

**Reporte Técnico No. CCC-09-002  
14 de mayo de 2009**

©Coordinación de Ciencias Computacionales  
INAOE  
Luis Enrique Erro #1  
Sta. Ma. Tonantzintla,  
72840, Puebla, México



# Segmentación Markoviana Usando Modelos de Textura

Erika Danaé López Espinoza

Leopoldo Altamirano Robles

Coordinación de Ciencias Computacionales

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Luis Enrique Erro # 1, Santa María Tonantzintla, Puebla, 72840, México

E-mail: {danae , robles}@inaoep.mx

## Abstract

*En este trabajo se trata el problema de segmentación de imágenes con campos aleatorios de Markov. Se presenta un modelo de textura para segmentación Markoviana que integra en la función de energía funciones cliqués definidas a partir de campos de textura. Los campos de textura son obtenidos mediante la descomposición de Wold 2-D de campos aleatorios homogéneos y son empleados como campos de referencia interno y externo en la función de energía de segundo grado. El modelo de textura propuesto es integrado a campos aleatorios de Markov planos y de estructura de árbol; y probado en una variedad de imágenes reales y sintéticas. A partir de los resultados de segmentación obtenidos observamos que incorporar campos de textura a la función de energía mejora la calidad de la segmentación.*

## 1 Introducción

Existen dos niveles de procesamiento de imágenes [1]: el procesamiento de alto nivel, el cual ayuda a extraer características simbólicas (por ejemplo el reconocimiento de caracteres en una carta escrita) y el procesamiento de bajo nivel el cual trata con la extracción de atributos de imagen (bordes, características de textura, regiones, etc.) necesarios para procesamientos de alto nivel.

La segmentación de imágenes es un proceso de bajo nivel que permite descomponer una imagen en un conjunto de regiones homogéneas disjuntas basándose en características de similitud. A excepción de situaciones triviales, la segmentación no es una tarea sencilla debido a que el concepto de homogeneidad en regiones es difícil de tratar en procesos automáticos. En imágenes reales los objetos que pueden ser segmentados fácilmente por un humano podrían resultar erróneamente segmentados y particionados en una gran cantidad de regiones pequeñas por un procesamiento automático.

Muchas tareas de procesamiento de alto nivel se basan en la imagen preprocesada por la segmentación. Un ejemplo de lo anterior es la clasificación de imágenes de satélite [2, 3]: una vez que las regiones son extraídas, éstas pueden ser clasificadas como pertenecientes a alguna clase basándose en un conjunto de características relevantes como brillo, textura, forma, etc. Otros ejemplos que involucran en etapas tempranas un proceso de segmentación son el entendimiento e interpretación de imágenes, el reconocimiento de objetos, la descripción de superficies, etc. En todas estas tareas de alto nivel el resultado de la segmentación afecta severamente los procesos posteriores.

Existen muchas características que pueden ser consideradas durante el proceso de segmentación: niveles

de gris, color, movimiento, textura, etc. Varios trabajos han probado que emplear características de textura [4, 5, 6, 7, 8, 9] puede mejorar considerablemente las capacidades de los algoritmos de segmentación. Las texturas pueden ser clasificadas en dos tipos: estructural y estocásticas [10]. Por un lado, las texturas estructurales están formadas por un atributo que es periódicamente representado en la textura. La principal característica de esta clase de texturas es la naturaleza determinista del patrón periódico. Por otro lado, las texturas estocásticas están caracterizadas por una regularidad estocástica.

Varios enfoques han sido empleados para segmentar imágenes de texturas [11]. La mayoría de los métodos sigue un enfoque de clasificación basado en vectores de características. Cada clase de textura es descrita por un conjunto de  $n$ -características y la clasificación se realiza en el espacio  $n$ -dimensional empleando algunas métricas de distancia. Dos de los principales métodos para obtener parámetros de textura son la matriz de Co-ocurrencia [1] y los modelos estocásticos [12]. La idea atrás de la matriz de Co-ocurrencia, es contar el número de veces de aparición de un patrón en una textura. Por ejemplo, la ocurrencia de pares de niveles de gris de píxeles que son separados por una cierta distancia y están en una cierta dirección. Diferentes matrices de Co-ocurrencia pueden ser obtenidas usando distintas propiedades y a partir de cada una de ellas varias estadísticas pueden ser calculadas como medidas de textura: energía, entropía, correlación e inercia. Una desventaja de la matriz de Co-ocurrencia es que es posible derivar muchas características de textura y no existe una manera simple para extraer sólo una característica efectiva [13].

En los modelos estocásticos, no obstante, la textura se considera como una muestra de una distribución de probabilidad en el espacio de imagen. Cada píxel representa una variable aleatoria y un modelo probabilista es aplicado al campo aleatorio para obtener la distribución de probabilidad conjunta o condicional [14].

Los Campos Aleatorios de Markov (CAM) [12, 14, 15], son un modelo probabilista que ha sido exitosamente aplicado a problemas de visión de bajo nivel como restauración de imágenes, reconstrucción de superficies, análisis y síntesis de textura [9, 16], detección de bordes, segmentación [6, 17], etc.

A diferencia de los métodos puntuales [18, 19], los CAM tienen la capacidad de modelar interacciones espaciales entre píxeles vecinos. La segmentación en los métodos puntuales se realiza independientemente del contexto en el que se encuentre el píxel, lo que ocasiona que la segmentación sea de poca calidad. Así, nos damos cuenta que las restricciones contextuales nos dan información valiosa durante el proceso de segmentación, debido a que sabemos que una escena es mejor entendida en el contexto visual y espacial de los objetos que hay en ella. En particular en las imágenes de satélite, los píxeles adyacentes están co-relacionados debido a que los sensores registran porciones significativas de energía a partir de píxeles adyacentes, además los tipos de cobertura terrestre generalmente se presentan sobre una región que es más grande comparada con el tamaño del píxel.

Otra particularidad de los modelos CAM es que pueden ser aplicados en diferentes niveles de abstracción: píxeles o regiones.

Los modelos de visión basados en CAM para segmentación son formulados dentro del enfoque Bayesiano. La solución óptima del problema se define a través de la estimación de probabilidad máxima a posteriori (MAP) y es calculada por minimizar la energía posterior  $p(x/y)$ . La energía posterior dependerá del modelo a priori  $p(x)$ , en el cual se codifican las restricciones contextuales y el modelo de probabilidad  $p(y/x)$  que depende de los datos observados  $y$  [14]. La definición de un modelo CAM válido, involucra especificar la estructura del modelo y los parámetros  $\theta$ . En la estructura del modelo se selecciona el sistema de vecinos, la función de energía válida o modelo de probabilidad condicional. Mientras que, la estimación de los parámetros  $\theta$  involucra un problema de optimización, el cual se resuelve comúnmente con técnicas como [12, 14]: ML (Maximum Likelihood), codificación (Coding), PML (Pseudo-likelihood), EM (Expectation-Maximization), etc.

Los parámetros  $\theta$  de la energía posterior  $p(x/y)$  se asumen conocidos cuando se trata de una segmentación

supervisada. Entretanto, en el caso no supervisado los parámetros  $\theta$  son desconocidos (problema de datos incompletos [14]) y tienen que ser inferidos a partir de los datos  $y$ .

El uso práctico de un modelo CAM se atribuye a la equivalencia entre la distribución de probabilidad de un campo aleatorio de Markov y la distribución de probabilidad de Gibbs [14, 20]. En segmentación de imágenes, la energía de Gibbs  $U(x)$  se define comúnmente mediante un auto-modelo [20] que representa una energía de segundo orden. Esta energía considera sólo cliques de un sitio y pares de sitios, sin embargo, en los modelos de visión para segmentación basados en CAM los cliques de un sitio no son empleados y se asumen a cero debido a que el campo externo  $\alpha_i$  no se conoce. Sin embargo, emplear sólo cliques de dos sitios dentro del modelo de energía a priori produce una segmentación de calidad pobre, principalmente en los bordes de las regiones de textura [7]. Esto es debido a que el componente estructural de la textura no es capturado por completo y el proceso de segmentación es guiado sólo por un modelo a priori de bajo nivel y con poca información semántica. Además, el modelo CAM con sólo interacciones de cliques de dos sitios no puede capturar la periodicidad ni la direccionalidad de la textura. Entonces, cuando este modelo es aplicado a un patrón estructural, el patrón sintetizado no es similar visualmente al original. No obstante, es difícil introducir interacciones de cliques de un sitio a la energía a priori debido a que el campo externo  $\alpha_i$  es desconocido. En [21], Picard sugiere que el campo externo no homogéneo puede ser establecido a los valores de una imagen de referencia, aunque no da tal imagen de referencia. En [7], Li *et al.* proponen emplear el componente estructural de la descomposición de Wold [22] como imagen de referencia dentro de un modelo CAM plano pero dejan a un lado la parte estocástica de la textura. Sabiendo que, la textura es una característica que añade mucha información a la segmentación de imágenes y que es una unificación de componentes estructurales y estocásticos, en este trabajo proponemos un modelo de textura para segmentación de imágenes basado en campos aleatorios de Markov, el cual combina los campos de textura estructural y estocástico. El modelo de textura es definido a través de una función de energía de segundo grado con funciones cliques especificadas a partir de los campos de textura, obtenidos mediante la descomposición de Wold 2-D para campos aleatorios homogéneos. El componente estructural de la descomposición define el campo externo  $\alpha_i$ , mientras que, el componente estocástico a el campo interno  $\beta_{ij}$ . Estos campos de textura se obtienen en el dominio de las frecuencias, por lo cual el modelo queda definido tanto en el dominio espacial (interacciones entre píxeles) como en el de las frecuencias (campos de referencia). A diferencia de los modelos empleados en la literatura [6, 7, 8, 9, 13, 16, 17, 23], en los cuales la homogeneidad es asumida por conveniencia computacional y matemática, en nuestro modelo ambos campos se consideran como no homogéneos. El modelo de textura propuesto es incorporado a modelos CAM planos y de estructura de árbol [24, 25, 26]. Los experimentos realizados fueron hechos en una variedad de imágenes reales y sintéticas. A partir de los resultados de segmentación obtenidos, observamos que incorporar campos de textura a la función de energía mejora la calidad de la segmentación.

## 2 Campos Aleatorios

### 2.1 Campos Aleatorios de Markov

Sea  $S$  una retícula rectangular de una imagen 2-D de dimensiones  $n \times n$  denotada por:

$$S = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq n\} \quad (1)$$

donde  $s_{ij} = (i, j)$  denotan los sitios de la retícula (o píxeles).

Sea  $c$  un clique subconjunto de  $S$ , en el cual cada sitio es vecino de los demás y sea  $C$  el conjunto de todos los cliques. Sea  $X = \{X(s) : s \in S\}$  un CAM definido sobre  $S$ , entonces la función de probabilidad de un

CAM positivo definido sobre  $S$  es descrita por una distribución de Gibbs (Teorema de Hammersley-Clifford [12, 14]):

$$p(x) = \frac{1}{Z} \exp[-U(x)] = \frac{1}{Z} \exp \left[ - \sum_{c \in C} V_c(x) \right] \quad (2)$$

donde  $Z$  es una constante de normalización llamada la función de partición y  $V_c(\cdot)$  es la función potencial definida sobre los cliques. La energía de Gibbs  $U(x)$  es la suma de varios términos o funciones potenciales cada uno correspondiente a cliques de distinto tamaño [14]:

$$U(x) = \sum_{s \in C_1} V_1(x_s) + \sum_{s, s' \in C_2} V_2(x_s, x_{s'}) + \sum_{s, s', s'' \in C_3} V_3(x_s, x_{s'}, x_{s''}) + \dots \quad (3)$$

El objetivo de la segmentación con CAM es estimar la etiqueta correcta para cada sitio  $s$ . El problema básico, para la mayoría de las aplicaciones es encontrar el etiquetado  $x$  el cual maximice  $p(x)$  dados los datos  $y$ . Los modelos de visión basados en CAM para segmentación son formulados dentro del enfoque Bayesiano. La solución óptima del problema es definida como la estimación de probabilidad máxima a posteriori (MAP) y es calculada por minimizar la energía posterior.

$$\begin{aligned} x_{MAP} &= \operatorname{argmax}_x p(x/y) \\ &= \operatorname{argmax}_x p(y/x)p(x)/p(y) \\ &= \operatorname{argmax}_x p(y/x)p(x) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $p(y)$  no depende del etiquetado  $x$ . Cuando un modelo a priori  $p(x)$  no es asumido, el proceso de maximización involucra sólo  $p(y/x)$ , el cual es conocido como el estimador de Máxima Probabilidad (ML) [18]. Resumiendo, el modelado con CAM consiste en la definición de los siguientes pasos [27]:

1. Definir un sistema de vecinos  $X_{\eta(s)}$
2. Definir los cliques
3. Definir la energía a priori  $p(x)$
4. Definir la energía de probabilidad  $p(y/x)$
5. Derivar la energía posterior  $p(x/y)$

## 2.2 Descomposición de Wold para Campos Aleatorios

Sea  $y(n, m)$ ,  $(n, m) \in Z^2$  un campo aleatorio homogéneo regular. La descomposición de Wold 2-D permite descomponer el campo dentro de dos componentes mutuamente ortogonales:

$$y(n, m) = v(n, m) + w(n, m) \quad (5)$$

donde  $\{v(n, m)\}$  es el componente estructural y  $\{w(n, m)\}$  es el componente estocástico. El componente estructural  $\{v(n, m)\}$  de un campo aleatorio homogéneo regular 2-D puede ser representado por la siguiente descomposición ortogonal:

$$v(n, m) = h(n, m) + g(n, m) \quad (6)$$

donde  $\{h(n, m)\}$  es el campo aleatorio armónico y  $\{g(n, m)\}$  es llamado el campo aleatorio evanescente generalizado. El campo evanescente generalizado es una combinación lineal de un número contable de campos evanescentes mutuamente ortogonales.

En el dominio de las frecuencias, la función de distribución espectral  $F(w, v)$  de  $y(n, m)$  puede ser representada por las funciones de distribución espectral de los campos componentes:

$$F(w, v) = F_w(w, v) + F_v(w, v) \quad (7)$$

donde  $F_w(w, v)$  es la función de distribución espectral del componente puramente estocástico  $\{w(n, m)\}$  y  $F_v(w, v)$  es la función de distribución espectral del componente estructural  $\{v(n, m)\}$ . La función de distribución espectral  $F_v(w, v)$  del componente estructural del campo regular, es representada por:

$$F_v(n, m) = F_h(w, v) + F_g(w, v) \quad (8)$$

En [22] Francos *et al.* proponen los siguientes modelos para cada uno de los campos. Para el campo aleatorio armónico se tiene la siguiente representación:

$$h(n, m) = \sum_{k=1}^P \{C_k \cos 2\pi(n\omega_k + mv_k) + D_k \sin 2\pi(n\omega_k + mv_k)\} \quad (9)$$

donde las  $C_k$ 's y  $D_k$ 's son variables aleatorias mutuamente ortogonales, y  $(\omega_p, v_p)$  son las frecuencias espaciales de las  $k$ 's armónicas. Este componente genera las funciones delta 2-D de la "densidad espectral" (Las funciones delta 2-D son funciones singulares soportadas sobre puntos discretos en el plano de las frecuencias).

Un modelo para el campo evanescente  $\{g(n, m)\}$ , el cual corresponde a las RNSHP (rational non-symmetrical half-plane) definido por  $(\alpha, \beta) \in O$  esta definido mediante una combinación lineal de campos  $e(n, m)$  de la forma:

$$e(n, m) = s(n) \sum_{i=1}^I \{A_i \cos 2\pi mv_i + B_i \sin 2\pi mv_i\} \quad (10)$$

donde  $\{s(n)\}$  es un proceso 1-D no-determinista puro,  $I$  es el número de componentes evanescentes con inclinación  $(\alpha, \beta)$  y  $v_i$  es la frecuencia del  $i$ -ésimo componente evanescente.

El componente estocástico esta definido como:

$$w(n, m) = - \sum_{(0,0) \prec (k,l)} b(k, l) w(n - k, m - l) + u(n, m) \quad (11)$$

donde  $\{u(n, m)\}$  es el campo de inovación blanco 2-D, cuya varianza es  $\sigma^2$ .

Más detalles de las ecuaciones (9), (10) y (11) pueden ser encontrados en [22]. Artículos relacionados con la estimación de parámetros y aplicación de la descomposición de Wold son [28, 29, 30, 31].

### 3 Modelo de Textura Propuesto para Segmentación

Varios enfoques han sido empleados para clasificar imágenes de texturas. La mayoría de los modelos basados en CAM que utilizan la textura para mejorar la segmentación de imágenes, se basan en vectores de características. Estos vectores consideran entre sus atributos las diferentes características de textura para

realizar la segmentación[32]. Sin embargo, una textura puede ser descompuesta en sus características esenciales estructurales y estocásticas. La pregunta que surge ahora es, cómo un sólo modelo basado en CAM puede tomar en cuenta a la textura estructural y estocástica y mantener limitada la complejidad del CAM. En las siguientes secciones presentamos el modelo de segmentación propuesto que combina la textura estructural y estocástica dentro de la energía posterior  $p(x/y)$  del CAM. Primero, definimos la energía a priori  $p(x)$  en la cual el campo interno y externo son definidos mediante los campos de textura estructural y estocástico, después definimos la energía de probabilidad  $p(y/x)$  mediante una distribución Gaussiana para finalmente derivar la energía posterior a minimizar.

### 3.1 Definición de la Energía a Priori

Sea la energía de Gibbs Ec. (3) definida mediante un auto-modelo no homogéneo [33] que considera sólo cliques de tamaño dos como máximo, llamada energía de segundo grado:

$$U(x) = \sum_{s \in S} \left( \alpha_s x_s + \sum_{r \in X_{\eta(s)}} \beta_{sr} x_s x_r \right) \quad (12)$$

donde  $\alpha_s$  y  $\beta_{sr}$  son los parámetros del modelo de variación espacial, los cuales representan el campo externo e interno respectivamente.

Sea  $V$  el campo aleatorio del componente estructural con sitios  $v_{ij} = (i, j)$  de la retícula  $S$  y sea  $W$  el campo aleatorio del componente estocástico con sitios  $w_{ij} = (i, j)$  también de la retícula  $S$ ; ambos campos obtenidos mediante la descomposición de Wold 2-D. Nombremos a  $V$  y  $W$ , los campos de referencia del modelo de la Ec. (12). Definamos las funciones potenciales  $V_c(\cdot)$  de la distribución de probabilidad para cliques de dos sitios como:

$$V_c(x) = \begin{cases} \beta^{sr} = |w_s - w_r| & \text{si } s \neq r, s, r \in c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (13)$$

donde  $w_s = w_{ij} \neq w_r = w_{i'j'}$ . De esta forma el auto-modelo no homogéneo queda definido mediante los campos aleatorios de referencia  $V$  y  $W$ , siendo  $w_{sr} = \beta^{sr}$  y  $\alpha_s = v_s$ . Por tanto, la función de energía previa queda definida como:

$$U_p(x) = \sum_{s \in S} \left( v_s x_s + \sum_{r \in X_{\eta(s)}} w_{sr} x_s x_r \right) \quad (14)$$

### 3.2 Definición de la Energía de Probabilidad

Considerando que la imagen puede contener más de una banda y éstas están co-relacionadas, el modelo de probabilidad  $p(y/x)$  lo definimos mediante una distribución Gaussiana como sigue:

$$p(y/x) = \prod_{s \in S} p(y_s/x_s) \quad (15)$$

y

$$p(y_s/x_s = k) = \frac{1}{2\pi^{B/2} |Cov_k|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (y_s - \mu_k)^T (Cov_k)^{-1} (y_s - \mu_k) \right] \quad (16)$$

donde  $\mu_k$  y  $Cov_k$  es la media y la matriz de covarianza de la clase  $k$ ,  $B$  es el número de bandas de la imagen.

### 3.3 Energía Posterior

Como pudo verse en la Ec. (4), lo que se busca es maximizar la probabilidad posterior  $p(x/y)$  para encontrar el etiquetado  $x$ . Entonces la energía posterior a maximizar considerando la energía a priori  $p(x)$  y la energía de probabilidad  $p(y/x)$  definidas anteriormente es:

$$x_{MAP} = \operatorname{argmax}_x [\ln p(y/x) + \ln p(x)] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{argmax}_x \sum_{s \in S} \ln \left[ \frac{1}{2\pi^{B/2} |Cov_k|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (y_s - \mu_s)^T (Cov_k)^{-1} (y_s - \mu_s) \right] \right] \\ &\quad + \ln \left[ \frac{1}{Z} \exp \left[ - \left( \sum_{s \in S} \left( v_s x_s + \sum_{r \in X_{\eta(s)}} w_{sr} x_s x_r \right) \right) \right] \right] \\ &= \operatorname{argmax}_x \sum_{s \in S} - \left[ \ln 2\pi^{B/2} |Cov_k|^{1/2} + \frac{1}{2} (y_s - \mu_s)^T (Cov_k)^{-1} (y_s - \mu_s) \right] \\ &\quad - \frac{1}{Z} \left[ \sum_{s \in S} \left( v_s x_s + \sum_{r \in X_{\eta(s)}} w_{sr} x_s x_r \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{argmin}_x \sum_{s \in S} \left[ \ln 2\pi^{B/2} |Cov_k|^{1/2} + \frac{1}{2} (y_s - \mu_s)^T (Cov_k)^{-1} (y_s - \mu_s) \right] \\ &\quad + \frac{1}{Z} \left[ \sum_{s \in S} v_s x_s + \sum_{s \in S} \sum_{r \in X_{\eta(s)}} w_{sr} x_s x_r \right] \end{aligned} \quad (19)$$

de esta manera la energía posterior de la Ec. (19) combina dentro de la energía a priori  $p(x)$  los campos de textura estructural  $v_s$  y estocástico  $w_{sr}$  de la descomposición. Además, esta energía queda definida mediante funciones cliques de un sitio y dos sitios. A diferencia de los modelos empleados en la literatura, en esta energía ambos campos son diferentes de cero ( $\alpha_s \neq 0, \beta^{sr} \neq 0$ ) y permiten sitios no homogéneos.

## 4 Resultados Experimentales

A continuación se presentan los resultados experimentales realizados para ilustrar el desempeño del modelo de textura propuesto. Los resultados se evaluaron de acuerdo a la calidad de segmentación y el tiempo computacional. Los experimentos fueron realizados sobre imágenes sintéticas y reales. Para el caso de imágenes reales, los mapas de segmentación son obtenidos a partir de una segmentación manual. El porcentaje de píxeles bien clasificados sirvió para evaluar cuantitativamente la calidad de la segmentación.

Las imágenes reales fueron obtenidas del repositorio VisTex [34] del grupo de modelado y visión del MIT. Las imágenes segmentadas de este repositorio pertenecen al conjunto de texturas de referencia, las cuales son texturas homogéneas en perspectiva oblicua y frontal.

Por otro lado, también se realizaron experimentos de segmentación en imágenes de la colección de fotografías de Corel [35]. En la Fig. 1 se muestran algunas de las imágenes de textura segmentadas. Estas imágenes son RGB con resolución de 128x128 y 120x180 píxeles.

El modelo de textura propuesto fue incorporado a modelos CAM planos y de estructura de árbol. Fue implementado para ambos casos: segmentación supervisada y no supervisada. La aplicación fue desarrollada





**Figura 1. Ejemplos de imágenes de textura segmentadas.**

en MATLAB 7.1 y los experimentos fueron realizados sobre una computadora con sistema operativo Linux (Ubuntu 7.04), procesador a 1.66GHz y 1GB de RAM.

Para todas las segmentaciones no supervisadas los parámetros Gaussianos del modelo de datos fueron estimados mediante el algoritmo K-means [18]. Para el caso de segmentación supervisada, las medias y las matrices de covarianza fueron estimadas a partir de regiones representativas seleccionadas por el usuario.

Antes de segmentar la imagen con el modelo de textura, es necesario estimar los campos de referencia  $V$  y  $W$  mediante la descomposición de Wold. El algoritmo de descomposición de Wold empleado para obtener los campos de referencia  $V$  y  $W$  fue el publicado en [36]. Para obtener la descomposición es necesario especificar parámetros tales como: frecuencia de corte  $f_c$ , número de líneas evanescentes  $L_e$ , filtro empleado para detectar las líneas evanescentes y umbral  $umbral_b$  empleado por el filtro de bordes. Estos parámetros de descomposición fueron seleccionados manualmente y ajustados a cada imagen. En la tabla 1 se muestra el valor de cada uno de los parámetros para cada imagen segmentada. La tabla muestra de izquierda a derecha y por columnas, el valor de amplitud máximo alcanzado por las frecuencias, la  $f_c$  empleada para la detección de picos armónicos, las líneas evanescentes encontradas en cada imagen de magnitudes de Fourier, el filtro empleado para obtener la Transformada de Hough, el umbral empleado para cada filtro y el tiempo en segundos que tardó el proceso de descomposición en obtener ambos campos de referencia.

Como puede observarse en la tabla, existen imágenes que no presentan líneas evanescentes, por tanto el campo estructural está formado sólo por el componente armónico de la descomposición, mientras que, el campo estocástico está formado por el residuo de las frecuencias. Además, el tiempo que tarda la estimación de los campos de referencia no es mayor a 30 segundos, siendo esto un tiempo poco significativo para el proceso de segmentación.

Después de estimar los campos de referencia, se realiza la segmentación de las imágenes aplicando el modelo de textura. Las diferentes implementaciones empleadas en las pruebas de los modelos CAM supervisados se presentan en la tabla 2. El algoritmo CAM-PS está basado en un modelo CAM plano simple ideado a partir de los modelos presentados en [37]. El CAM-PS está definido mediante una energía de segundo grado con  $\alpha = 0$ , por lo que considera sólo interacciones de cliques pares. El parámetro  $\beta$  que representa al campo interno es considerado homogéneo y toma un valor fijo de 0.9. El sistema de vecinos  $X_{\eta(s)}$  empleado es de primer orden y la función de probabilidad  $p(y/x)$  es definida mediante una distribución Gaussiana que considera los canales de las imágenes como no co-relacionados, es decir emplea la desviación estándar  $\sigma^2$  en lugar de la matriz de covarianza. En todos los modelos supervisados y no supervisados se emplea el

No. imagen	Imagen	Amplitud	$f_c$	$L_e$	Filtro	Umbral <sub>b</sub>	Tiempo seg.
1	Pimientos	14.493	11.75	2	Canny	0.03	17.74
2	Clouds	14.547	9.75	1	Sobel	0.03	30.08
3	Paintings	14.436	10.75	1	Canny	0.1	29.04
4	203037	14.507	11.25	-	-	-	18.34
5	Buildings	14.562	11.75	1	Sobel	0.05	25.14
6	Flowers	14.478	11.25	-	-	-	20.59
7	Tile-0003	13.717	10.75	1	Roberts	0.02	20.59
8	10001	14.498	11.25	-	-	-	19.63
9	5011	14.365	11.25	1	Canny	0.1	27.64
10	105000	14.461	10.75	1	Sobel	0.01	18
11	Tile-00091	14.487	9.75	10	Canny	0.01	24.68
12	10012	15.291	11.25	2	Prewitt	0.01	28.8
13	10044	14.811	10.25	-	-	-	19.2
14	103023	14.420	11	6	Canny	0.02	26.19

**Tabla 1. Tabla de parámetros empleados y tiempo de procesamiento que tardó la descomposición de Wold en cada imagen de prueba.**

	Campo externo	Campo interno	Estimación $\alpha$ y/o $\beta$	$X_{\eta(s)}$
CAM-PS	no existe	homogéneo	no se realiza	1er. orden
CAM-PS-TCP(4)	no existe	no-homogéneo	D. Wold	1er. orden
CAM-PS-TE2(4)	no-homogéneo	no-homogéneo	D. Wold	1er. orden
CAM-PS-TCP(8)	no existe	no-homogéneo	D. Wold	2do. orden
CAM-PS-TE2(8)	no-homogéneo	no-homogéneo	D. Wold	2do. orden

**Tabla 2. Implementaciones de modelos CAM supervisados empleados en las pruebas de segmentación.**

algoritmo de optimización ICM (Iterated Conditioned Mode) [12].

Las implementaciones CAM-PS-TCP(4), CAM-PS-TE2(4), CAM-PS-TCP(8) y CAM-PS-TE2(8) están basadas en el modelo CAM-PS explicado anteriormente. A diferencia de la primera implementación, en estas cuatro se utiliza el modelo de textura propuesto en la sección 3. Las implementaciones CAM-PS-TCP(4) y CAM-PS-TCP(8) emplean una energía a priori con sólo cliques pares y con un campo interno no homogéneo definido a partir del componente estocástico. La diferencia entre estas dos implementaciones es el sistema de vecinos que utilizan. Por un lado, el CAM-PS-TCP(4) utiliza un sistema de vecinos de primer orden. Por otro lado, el CAM-PS-TCP(8) emplea un sistema de vecinos de segundo orden.

Las implementaciones CAM-PS-TE2(4) y CAM-PS-TE2(8) a diferencia de las anteriores utilizan una energía a priori con cliques de un sitio y dos sitios no homogéneos. Los dos campos de referencia interno y externo son obtenidos también a partir de la descomposición de Wold. La diferencia entre estas dos implementaciones es también el sistema de vecinos que utilizan.

En la tabla 3 se muestran las implementaciones para los modelos CAM no supervisados. La implementación base no supervisada CAM-PNS es el algoritmo análogo a la implementación CAM-PS descrita anterior-

	<i>Campo externo</i>	<i>Campo interno</i>	<i>Estimación <math>\alpha</math> y/o <math>\beta</math></i>	$X_{\eta(s)}$
<i>CAM-PNS</i>	no existe	homogéneo	no se realiza	1er. orden
<i>CAM-PNS-TCP(4)</i>	no existe	no-homogéneo	D. Wold	1er. orden
<i>CAM-PNS-TE2(4)</i>	no-homogéneo	no-homogéneo	D. Wold	1er. orden
<i>CAM-PNS-TCP(8)</i>	no existe	no-homogéneo	D. Wold	2do. orden
<i>CAM-PNS-TE2(8)</i>	no-homogéneo	no-homogéneo	D. Wold	2do. orden
<i>CAM-EANS-E2(8)</i>	no existe	no-homogéneo	MPL	2do. orden
<i>CAM-EANS-TE2(8)</i>	no-homogéneo	no-homogéneo	D. Wold	2do. orden

**Tabla 3. Implementaciones de modelos CAM no supervisados empleados en las pruebas de segmentación.**

mente. Al igual que en las implementaciones supervisadas, las no supervisadas se diferencian por el sistema de vecinos que utilizan, por las funciones cliqués definidas en su función de energía a priori (modelo de textura) y por la no-homogeneidad de los campos de referencia.

En el caso no supervisado, dos modelos más son probados en las segmentaciones: el modelo CAM-EANS-E2(8) y el modelo CAM-EANS-TE2(8). La implementación CAM-EANS-E2(8) está basada en el modelo propuesto en [24] por Poggi *et al.* y mejorado posteriormente en [25]. Este modelo CAM ha sido extendido en [26] para trabajar con segmentación supervisada. El modelo de Poggi *et al.* es llamado Campo Aleatorio de Markov con Estructura de Árbol (CAM-EA). Este modelo a diferencia de los CAM planos, emplea combinaciones de CAM's binarios y permite así, estimar los parámetros  $\theta$  de manera local. Además es recursivo, de rápida optimización y tiene la capacidad de dividir clases altamente co-relacionadas. La implementación no supervisada hecha en este trabajo está basada en lo publicado en [24, 25].

Por otro lado, la implementación CAM-EANS-TE2(8) se basa en el modelo CAM-EA anterior. La diferencia reside en la función posterior empleada por cada CAM binario, es decir, esta implementación utiliza el modelo de textura propuesto en la Ec. (19), la cual involucra una energía a priori de segundo grado con funciones cliqués de un sitio y de dos sitios definidos como no-homogéneos.

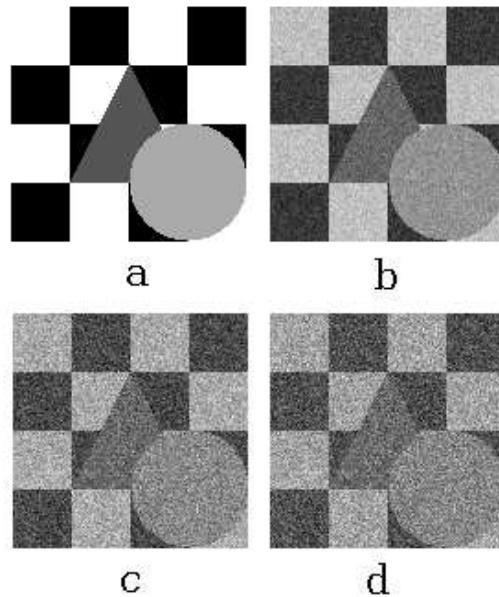
A continuación se presentan los resultados de segmentación obtenidos con los 12 modelos implementados.

#### 4.1 Experimento con imagen sintética

Primero verificamos el modelo de textura para segmentación sobre imágenes sintéticas. Las imágenes sintéticas segmentadas se muestra en la Fig. 2. La imagen original se encuentra en escala de grises con un tamaño de 128x128 píxeles y presenta cuatro clases. Las imágenes con ruido son obtenidas por adicionar ruido Gaussiano de media cero a la imagen original 2a. El número 3, 5 y 13 indica el nivel de ruido en decibelios<sup>1</sup>. Las imágenes han sido obtenidas del sitio de Zoltan Kato [38] y han sido empleadas en diferentes artículos [37].

Los porcentajes de segmentación empleando los modelos CAM con estructura de árbol se presentan en la tabla 4. Podemos observar que la calidad de la segmentación para el caso del modelo con textura CAM-EANS-TE2(8) disminuye conforme la imagen es afectada por mayor cantidad de ruido. Algo similar sucede

<sup>1</sup>Unidad empleada para expresar la magnitud de modificación en una señal. Si se tienen dos señales diferentes:  $P_{salida}$  y  $P_{entrada}$ , y se desea saber cual es el cambio de una con respecto a la otra se utiliza la siguiente fórmula:  $1dB = 10\text{Log}_{10}(P_{salida}/P_{entrada})$ . Por ejemplo,  $3dB$  es igual a  $10\text{Log}_{10}2 = 3.01dB \approx 3dB$  y  $-3dB$  es  $10\text{Log}_{10}0.5 = -3.01dB \approx -3dB$ .



**Figura 2. Imagen sintética. a)imagen sintética original, b)imagen sintética con 13dB de ruido, c)imagen sintética con 5dB de ruido y d)imagen sintética con 3dB de ruido.**

con el modelo original CAM-EANS-E2(8). En los tres casos de ejemplo el modelo con textura CAM-EANS-TE2(8) obtiene mejores calidades de segmentación.

Imagen	CAM-EANS-E2(8)	CAM-EANS-TE2(8)
13dB	91.64	<b>92.02</b>
5dB	59.2	<b>74.44</b>
3dB	64.19	<b>64.29</b>

**Tabla 4. Porcentajes de segmentación para imágenes sintéticas 13dB, 5dB y 3dB empleando CAM-EANS-E2(8) y CAM-EANS-TE2(8).**

Las imágenes segmentadas empleando los modelos CAM con estructura de árbol para la imagen sintética 5dB se presentan en la Fig. 3. Como podemos observar las clases son mejor segmentadas empleando el modelo de textura (Fig. 3b), en particular la clase negra y la clase gris del triángulo.

Las calidades de segmentación para cada una de las clases para la imagen 5dB se presentan en las tablas 5 y 6. Podemos ver que la calidad de la segmentación con el modelo de textura es de un 74.44%, mientras que, para el modelo original CAM-EANS-E2(8) es de un 59.19%. La implementación CAM-EANS-TE2(8), que contiene al modelo de textura, está segmentando mal 4,187 píxeles mientras que, el modelo original CAM-EANS-E2(8) está segmentando mal 6,685. De forma independiente podemos observar que para cada clase la implementación con textura CAM-EANS-TE2(8) obtiene mejores calidades en 3 de 4 clases.

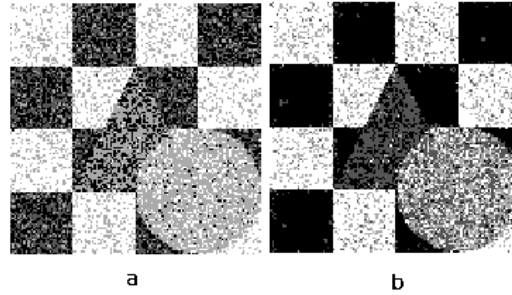


Figura 3. Imagen sintética 5dB: a)segmentación con CAM-EANS-E2(8), b)segmentación con CAM-EANS-TE2(8).

Clase	Área de ref. (píxeles)	Área seg. (píxeles)	Área inter. (píxeles)	[%] seg.	Píxeles erróneos
Blanco	6,120	5,650	4,793	78.317	857
Negro	5,533	3,326	2,601	47.009	725
Triangulo	1,523	2,316	64	4.202	2,252
Círculo	3,208	5,092	2,241	69.857	2,851
Total	16,384	16,384	9,699	59.198	6,685

Tabla 5. Porcentajes de segmentación para imagen sintética 5dB empleando CAM-EANS-E2(8).

#### 4.2 Experimentos con imágenes reales

En estos experimentos se verifica el modelo de textura sobre imágenes reales. Las calidades de las segmentaciones se obtuvieron comparando la imagen segmentada contra el mapa de segmentación real obtenido mediante segmentación manual. Las imágenes se identifican por el número que se presenta en la primera columna de la tabla 1. Las figuras 4 y 5 muestran los resultados de segmentación obtenidos para las imágenes identificadas por 8 y 6 empleando ambos enfoques: supervisado y no supervisado. Para estas imágenes se buscaron 2 clases y la tabla 7 presenta los correspondientes porcentajes de segmentación. Desde los resultados para la imagen 8 en la Fig. 4 podemos observar visualmente que incorporar textura para el caso CAM plano supervisado mejora la calidad de la segmentación (de 93.87% a 94.47%). Para el caso de la segmentación no supervisada el porcentaje de segmentación para el modelo CAM sin textura (CAM-PNS) es de 87.91% mientras que el mejor porcentaje de segmentación presentado por un modelo con textura (CAM-EANS-TE2(8)) es de 93.51%. Además, podemos observar que los bordes ya no tienden a suavizarse alrededor del avión. Por otro lado, la segmentación no supervisada es mejorada por los modelos CAM-EANS-E2(8) y CAM-EANS-TE2(8) siendo comparable a la segmentación supervisada.

En el experimento de la imagen identificada por 6 en la Fig. 5 observamos un caso similar al experimento anterior. Por un lado, la segmentación supervisada con textura mejora la segmentación supervisada sin textura (de 71.26% a 79.02%). En la figura puede observarse un área negra mayor que corresponde a las flores. En el caso de la segmentación no supervisada la mejora es muy visible tanto cualitativamente como cuantitativamente (de 52.43% a 79.02%). La mejora entre los modelos CAM-EANS-E2(8) y CAM-EANS-TE2(8)

<i>Clase</i>	<i>Área de ref. (píxeles)</i>	<i>Área seg. (píxeles)</i>	<i>Área inter. (píxeles)</i>	<i>[%] seg.</i>	<i>Píxeles erróneos</i>
Blanco	6,120	5,596	4,836	79.019	760
Negro	5,533	6,107	5,332	96.367	775
Triangulo	1,523	2,428	870	57.124	1,558
Círculo	3,208	2,253	1,159	36.128	1,094
Total	16,384	16,384	12,197	74.444	4,187

**Tabla 6. Porcentajes de segmentación para imagen sintética 5dB empleando CAM-EANS-TE2(8).**

<i>Modelo</i>	<i>Imagen 8 (10001)</i>	<i>Imagen 6 (Flowers)</i>
CAM-PS	93.87	71.26
CAM-PS-TCP(4)	93.48	<b>79.02</b>
CAM-PS-TE2(4)	93.55	77.92
CAM-PS-TCP(8)	93.55	76.73
CAM-PS-TE2(8)	<b>94.47</b>	76.03
CAM-PNS	87.91	52.43
CAM-PNS-TCP(4)	86.65	<b>79.02</b>
CAM-PNS-TE2(4)	86.65	77.92
CAM-PNS-TCP(8)	86.68	76.73
CAM-PNS-TE2(8)	86.68	76.03
CAM-EANS-E2(8)	<b>93.73</b>	64.51
CAM-EANS-TE2(8)	<b>93.51</b>	64.74

**Tabla 7. Porcentajes de segmentación obtenidos con los modelos CAM para la imagen 8(10001) y 6(Flowers).**

es sólo de décimas (de 64.51% a 64.74%).

Para el experimento realizado con la imagen 2 en Fig. 6, la calidad de la segmentación (Tabla 8) para el modelo con textura CAM-EANS-TE2(8) fue de 92.04%; teniendo sólo mejor calidad que el modelo no supervisado CAM-PNS 82.31%. Sin embargo, la diferencia con el modelo supervisado es sólo de 0.71 décimas.

En la Fig. 7 presentamos los resultados de segmentación para la imagen 14 o 103023. En este experimento sucede algo similar al experimento anterior. La segmentación con el modelo de textura no supervisado CAM-EANS-TE2(8) es mayor que una segmentación CAM no supervisada CAM-PNS, 92.64% y 83.6% respectivamente. Mientras que, la diferencia con la segmentación CAM-EANS-E2(8) es menor a 0.29 décimas. Visualmente podemos observar que las esquinas de la imagen son mejor segmentadas por los modelos CAM-EANS-E2(8) y CAM-EANS-TE2(8) no supervisados.

En la Fig. 8 presentamos resultados comparativos entre segmentaciones realizadas con implementaciones que contienen el modelo de textura y Normalized Cuts [39]. En estos resultados podemos ver claramente que la mejores segmentaciones están siendo obtenidos con los modelos de textura. En la tabla 9 presentamos los porcentajes de segmentación obtenidos para los modelos CAM. A partir de los resultados, podemos observar que para las imagen 10044 el modelo con textura CAM-EANS-TE2(8) supera en un 30% al modelo

<i>Modelo</i>	<i>Imagen 2 (Clouds)</i>	<i>Imagen 14 (103023)</i>
CAM-PS	<b>92.75</b>	<b>94.64</b>
CAM-PNS	82.31	83.6
CAM-EANS-E2(8)	92.35	92.93
CAM-EANS-TE2(8)	92.04	92.64

**Tabla 8. Porcentajes de segmentación obtenidos con los modelos CAM para la imagen 2(Clouds) y 14(103023).**

no supervisado plano CAM-PNS. Con respecto a las imágenes 10096 y 105000, el modelo no supervisado con textura CAM-EANS-TE2(8) supera al modelo supervisado con textura CAM-PS-TE2(8) en un 6.43% y 1.83% respectivamente.

<i>Imagen</i>	<i>Modelo</i>	<i>[%] segmentación</i>
10044	CAM-PNS	66.82
	CAM-EANS-TE2(8)	<b>97.05</b>
10096	CAM-PS-TE2(8)	91.53
	CAM-EANS-TE2(8)	<b>97.96</b>
105000	CAM-PS-TE2(8)	81.69
	CAM-EANS-TE2(8)	<b>83.52</b>

**Tabla 9. Porcentajes de segmentación obtenidos con los modelos CAM para la imagen 13(10044), 10096 y 10(105000).**

Los siguientes experimentos se realizaron sobre imágenes con mayor complejidad de segmentación. Por un lado, la imagen 7 en la Fig. 9 presenta una imagen con perspectiva frontal. La dificultad para segmentar esta imagen se da principalmente en los colores marrón y negro en la esquina superior derecha, debido a que los colores presentan características espectrales más parecidas resultado de la perspectiva. En las imágenes segmentadas podemos observar que los mejores resultados se presentan cuando se emplean características de textura dentro de la función de energía.

Por otro lado, la dificultad de segmentación de la imagen de los Pimientos en la Fig. 10 radica en que, una gran parte del pimiento verde aparece con sombras rojas y viceversa. Las segmentaciones obtenidas de la imagen 1 o Pimientos se presentan en la Fig. 10. Podemos observar que los segmentadores planos supervisados y más aún los no supervisados se equivocan al segmentar los pimientos; cosa que no sucede con la segmentación con CAM-EANS-E2(8) y CAM-EANS-TE2(8). Puede observarse que, en la parte del pimiento verde regiones pequeñas mal segmentadas con CAM-EANS-E2(8) están siendo bien segmentadas por la segmentación con el modelo de textura CAM-EANS-TE2(8). Además, podemos observar una segmentación de Kato *et al.* en [17], donde emplean un mejor estimador de parámetros Gaussianos ( $\mu$  y  $\sigma^2$ ). Observamos que la segmentación con nuestro modelo CAM-EANS-TE2(8) obtiene resultados muy similares a los de Kato, a pesar de emplear K-means para la estimación de parámetros Gaussianos.

En las Figs. 11 y 12 se presentan segmentaciones sobre escenas de paisajes. Podemos ver que para el caso de la imagen 9 en la Fig. 11 la segmentación supervisada plana esta siendo mejorada por el modelo que contiene características de textura. Por otro lado, para la imagen 4 en la Fig. 12 las segmentaciones

supervisadas y no supervisadas planas están siendo mejoradas notoriamente con los modelos CAM-EANS-TE2(8) y CAM-EANS-E2(8).

En la Fig 13 se presentan resultados sobre cómo el modelo de textura mejora la segmentación plana para el caso de segmentación supervisada. Las imágenes de prueba de estos experimentos son las identificadas por 3(superior), 11(media) y 5(inferior). Podemos observar que, para el caso de segmentación supervisada en la imagen 3 el agua es mejor segmentada. Con respecto a la imagen 11 se están eliminando píxeles mal segmentados en la parte inferior derecha. En la imagen 5 podemos observar que las ventanas están siendo mejor segmentadas por el modelo de textura.

Por último, presentamos la energía minimizada por cada modelo en cada una de las imágenes de prueba (Figs. 14 y 15). Podemos observar que la energía minimizada por cada implementación no supervisada se encuentra en los mismos rangos. Mientras que, para el caso supervisado la energía con el modelo CAM-PS-TCP(4) se dispara en 3 de las imágenes de prueba.

En las Figs. 16, 17 y 18 presentamos el tiempo de procesamiento de cada modelo para cada imagen. El tiempo graficado para los modelos con textura involucra tanto el tiempo que tarda la descomposición de Wold en obtener los campos de referencia y el proceso de segmentación con CAM. Para el caso de imágenes de tamaño 128x128 píxeles (imágenes 1-9), el tiempo de procesamiento para todas las implementaciones supervisadas es menor a 45 segundos, mientras que para imágenes con resolución superior (imágenes 10-14), los modelos sin textura obtienen mayor tiempo en 2 de los 5 casos. Para las implementaciones no supervisadas planas, el tiempo de procesamiento es menor a 1 minuto (imágenes 1-9). Para las imágenes 10-14, el tiempo de procesamiento es menor para las implementaciones con textura en 4 de los 5 casos. En las gráficas, puede observarse que en la imagen 10 en 16 y que la imagen 11 en 17 el algoritmo no converge y la segmentación utilizada para las comparaciones es la obtenida después de 100 iteraciones.

Con respecto a las implementaciones con estructura de árbol en las cuales se realizan además estimaciones de campos de referencia, el menor tiempo lo obtiene el modelo que involucra textura siendo menor en 14 de 15 imágenes. En esta gráfica se agrega una imagen 15 de resolución 512x512 píxeles.

En general, podemos observar que el tiempo de procesamiento se incrementa en todas las implementaciones no supervisadas con respecto a las supervisadas, debido a la estimación de parámetros Gaussianos que se tiene que realizar. Además, en los modelos de textura a diferencia de los modelos base CAM-PS y CAM-PNS se realizan también estimaciones de campos de referencia, sin embargo el incremento promedio en tiempo de procesamiento es menor a un minuto y medio para los modelos supervisados y casi 4 minutos para los modelos no supervisados.

## 5 Conclusiones

En este trabajo hemos propuesto un modelo de textura para segmentación Markoviana que integra en la función de energía de segundo grado funciones cliques definidas a partir de campos de textura. Usando la descomposición de Wold 2-D obtenemos campos de textura que empleamos posteriormente como campos de referencia interno y externo. El modelo de textura propuesto fue implementado en campos aleatorios de Markov planos y de estructura de árbol. El modelo fue probado en implementaciones supervisadas y no supervisadas sobre una variedad de imágenes sintéticas y reales. A partir de los resultados de segmentación obtenidos observamos que incorporar campos de textura a la función de energía mejora la calidad de la segmentación, en un promedio de 4% para CAM supervisados y de 8% a 14% para CAM no supervisados. En particular observamos que el modelo de textura que mejor se comportó en todos los experimentos fue el modelo CAM-EANS-TE2(8). Además, observamos que la calidad de la segmentación usando el modelo CAM-EANS-TE2(8) es comparable con una segmentación supervisada plana. Sin embargo, la desventaja



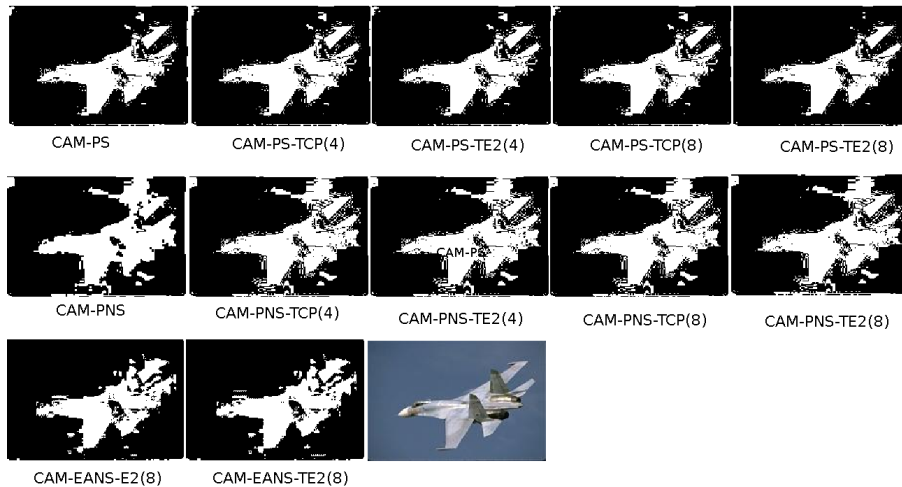
radica en el incremento en el tiempo de procesamiento debido a que en el modelo de textura no supervisado se realizan además estimaciones de parámetros Gaussianos y campos de referencia.

## Referencias

- [1] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley, 1992.
- [2] J. A. Richards and X. Jia. *Remote Sensing Digital Image Analysis*. Springer, 2006.
- [3] R. Khedama and A. Belhadj-Aissa. Contextual classification of remotely sensed data using map approach and mrf. In *Application of High Resolution Data*, 2004.
- [4] S. Liapis, E. Sifakis, and G. Tziritas. Colour and texture segmentation using wavelet frame analysis, deterministic relaxation, and fast marching algorithms. *Visual Communication & Image Representation*, 15:1–26, 2004.
- [5] J. B. Mena and J.A. Malpica. Color image segmentation using the dempster-shafer theory of evidence for the fusion of texture. In *ISPRS Archives, Vol. XXXIV, Part 3/W8, Munich, 17.-19.*, 2003.
- [6] Z. Kato and T.-Chuen Pong. A markov random field image segmentation model for color textured images. *Image and Vision Computing*, 24:1103–1114, 2006.
- [7] Feng Li, Jiaxiong Peng, and Xiaojun Zheng. Object-based and semantic image segmentation using mrf. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 6:883–840, 2004.
- [8] P. Arques, P. Compañ, R. Molina M. Pujol, and R. Rizo. Segmentación de imágenes: Incorporación de características de textura de color a la función de energía. In *ACTAS VIII Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial*, 1999.
- [9] G. Scarpa and M. Haindl. Unsupervised texture segmentation by spectral-spatial-independent clustering. *18th International Conference on Pattern Recognition - ICPR 2006*, 2:151 – 154, 2006.
- [10] R. M. Haralick. Statistical and structural approaches to texture. *Proceedings of the IEEE*, 67:786–804, 1979.
- [11] A. Materka and M. Strzelecki. Texture analysis methods – a review. Technical report, Technical University of Lodz, Institute of Electronics, COST B11 report, 1998.
- [12] Gerhard Winkler. *Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods - A Mathematical Introduction*. Springer, 2006.
- [13] A. Soto. Textures classification using markov random fields. Robotics Institute, School of Computer Science, Carnegie Mellon University <http://www2.eng.puc.cl/asoto/IIC-3672/Lecturas/18Abril/Texture.pdf>.
- [14] S. Z. Li. *Markov Random Field Modeling in Computer Vision*. Springer-Verlag, 1995.
- [15] M. Pujol, P. Rizo, P. Arques, P. Compañ, F. Escolano, and R. Molina. Aplicación de los modelos de campos aleatorios de markov en visión artificial. *Revista Electrónica de Visión por Computadora*, 4, 2000.

- [16] I. Kovtun. Texture segmentation of images on the basis of markov random fields, 2003.
- [17] Z. Kato, T-Chuen Pong, and J. Chung-M. Lee. Color image segmentation and parameter estimation in a markovian framework. *Pattern Recognition Letters*, 22:309–321, 2001.
- [18] J.P. Marques de Sá. *Pattern Recognition: Concepts, Methods and Applications*. Springer, 2001.
- [19] M. Oruc, A.M. Marangoz, and G. Buyuksalih. Comparison of pixel-based and object-oriented classification approaches using landsat-7 etm spectral bands. *Proceedings of ISPRS (International Society for Photogrammetry and Remote Sensing) Conference, XXth Congress*, 35:1118–1123, July 2004.
- [20] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6:721–741, 1984.
- [21] R. W. Picard. Structured patterns from random fields. In *Proc. 26th Annual Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computers*, pages 1011–1015, 1992.
- [22] J. M. Francos, A. Z. Meiri, and B. Porat. A unified texture model based on a 2-d wold-like decomposition. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(8):2665–2678, August 1993.
- [23] Z. Kato. Bayesian color image segmentation using reversible jump markov chain monte carlo. Technical report, Centrum voor Wiskunde en Informatica, PNA-R9902 - 1999.
- [24] G. Poggio and A.R. Averbuch. Image segmentation by tree-structured markov random field. *IEEE Signal Processing Lett.*, pages 155–157, July 1999.
- [25] C. D’Elia, G. Poggi, and G. Scarpa. A tree-structured markov random field model for bayesian image segmentation. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 12(10):1259–1273, October 2003.
- [26] G. Poggi, G. Scarpa, and J. Zerubia. Supervised segmentation of remote-sensing images based on a tree-structured mrf model. *IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing*, 43(8):1901–1911, August 2005.
- [27] S. Z. Li. Markov random field models in computer vision. In *In Proceedings of the European Conference on Computer Vision*, 361-370, 1994.
- [28] J. M. Francos, A. Z. Meiri, and B. Porat. A wold-like decomposition of 2-d discrete homogeneous random fields. Technical report, Ben-Gurion University - Israel and Technion-Israel Intitute of Technolog - Israel.
- [29] F. Liu and R. W. Picard. A spectral 2-d wold decomposition algorithm for homogeneous random fields. In *Proceeding of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, March 1999.
- [30] C. Ramananjara, O. Alata, and M. Najim. 2-d wold decomposition: New parameter estimation approach to evanescent field spectral supports.
- [31] R. Sriram, J. M. Francos, and W. A. Pearlman. Texture coding using a wold decomposition model. In *IEEE Transactions on Image Processing*, August 1996.

- [32] N. Kosaka, T. Akiyama, B. Tsai, and T. Kojima. Forest type classification using data fusion of multispectral and panchromatic high-resolution satellite imageries. *IGARSS05, Proceedings Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 4:2980–2983, 2005.
- [33] J. Besag. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 36:192–236, 1974.
- [34] R. Picard, Ch. Graczyk, S. Mann, J. Wachman, L. Picard, and Cambridge Massachusetts. L. Campbell at the Media Laboratory, MIT. <http://vismod.media.mit.edu/vismod/imagery/visiontexture/vistex.html>, 1995.
- [35] Corel. <http://www.cs.ubc.ca/~pcarbo/>.
- [36] Erika Danaé López-Espinoza and Leopoldo Altamirano-Robles. Deterministic component of 2-d wold decomposition for geometry and texture descriptors discovery. *Lecture Notes in Computer Science, Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications*, 4756/2008:241–250, 2007.
- [37] M. Berthod, Z. Kato, S. Yu, and J. Zerubia. Bayesian image classification using markov random fields. *Image and vision computing*, 14:285–295, 1996.
- [38] Zoltan Kato Home Page. Supervised image segmentation using markov random fields, <http://www.inf.u-szeged.hu/~kato/software/mrfdemo.html>.
- [39] J. Shi and J. Malik. Normalized cuts and image segmentation. *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(8):888–905, 2000.



**Figura 4. Resultados de segmentación para imagen 8 o 10001.**

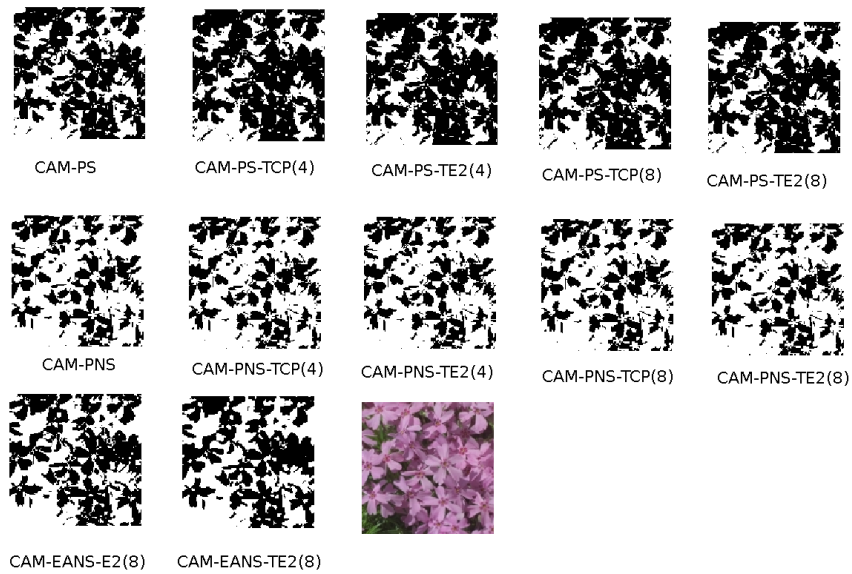


Figura 5. Resultados de segmentación para imagen 6 o Flowers.

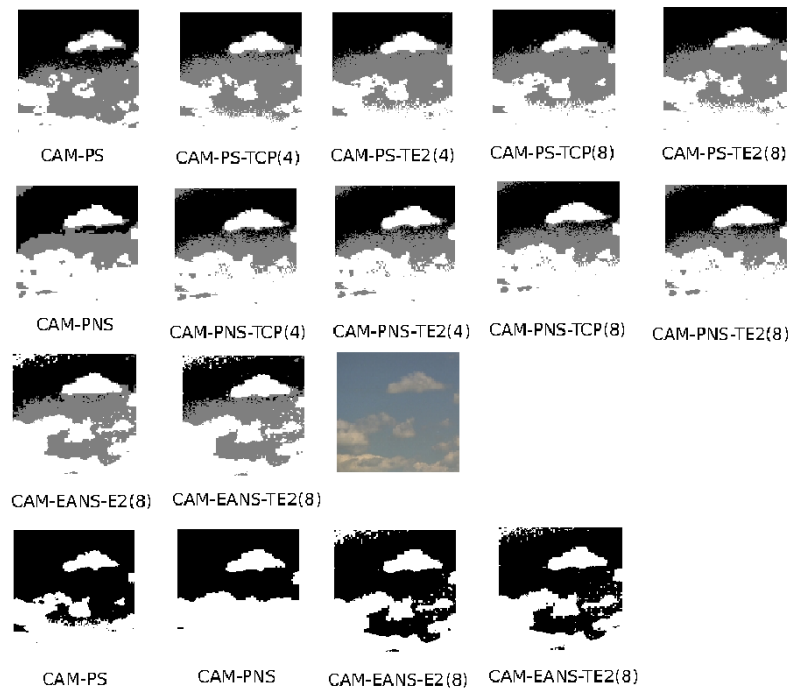


Figura 6. Resultados de segmentación para imagen 2 o Clouds.

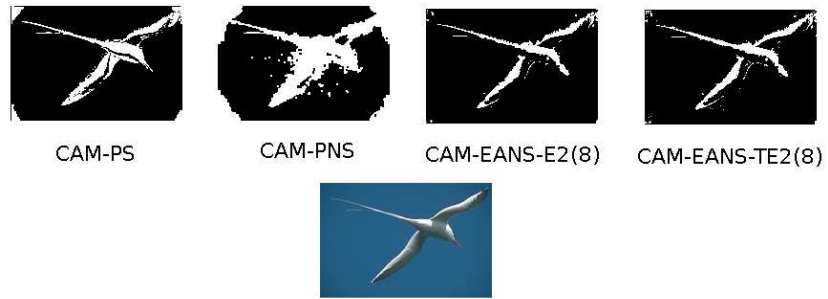


Figura 7. Segmentacion para imagen 14 o 103023.

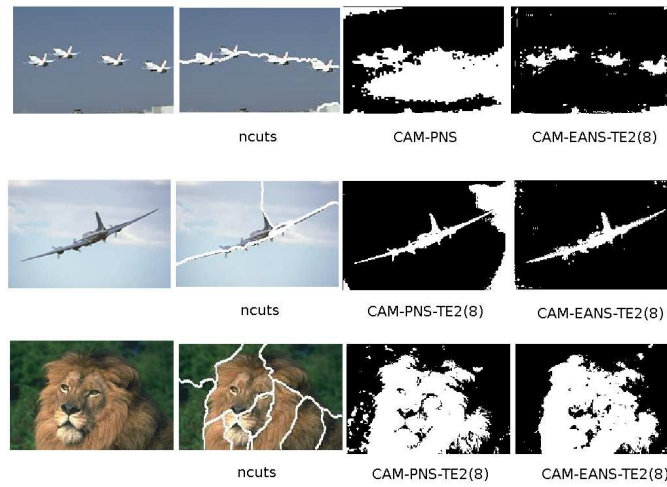


Figura 8. Segmentaciones para 10044, 10096 y 105000.

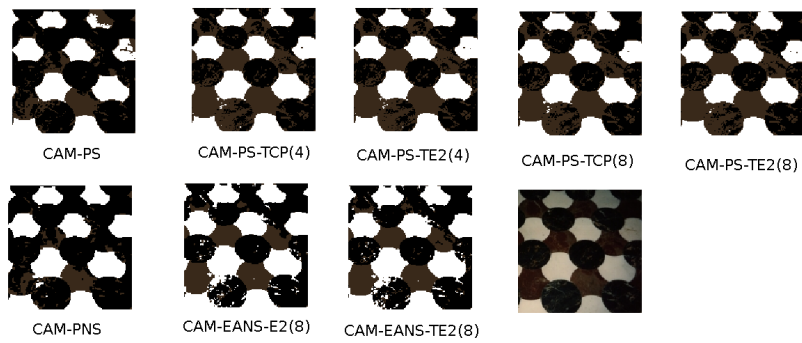


Figura 9. Segmentaciones para imagen 7 o Tile-0003.



Figura 10. Segmentación para imagen 1 o Pimientos.

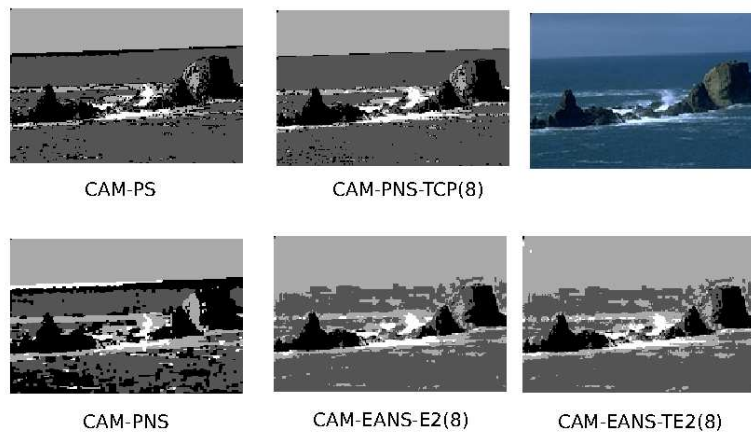


Figura 11. Segmentación para imagen 9 o 5011.

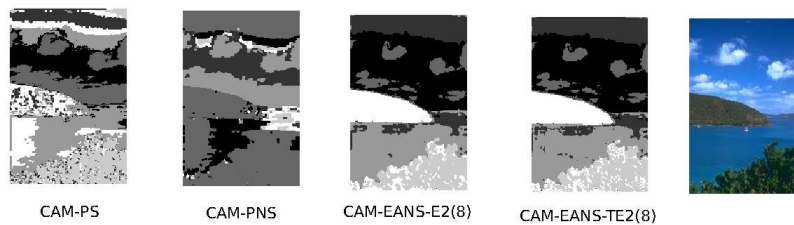


Figura 12. Segmentaciones para imagen 4 o 203037.

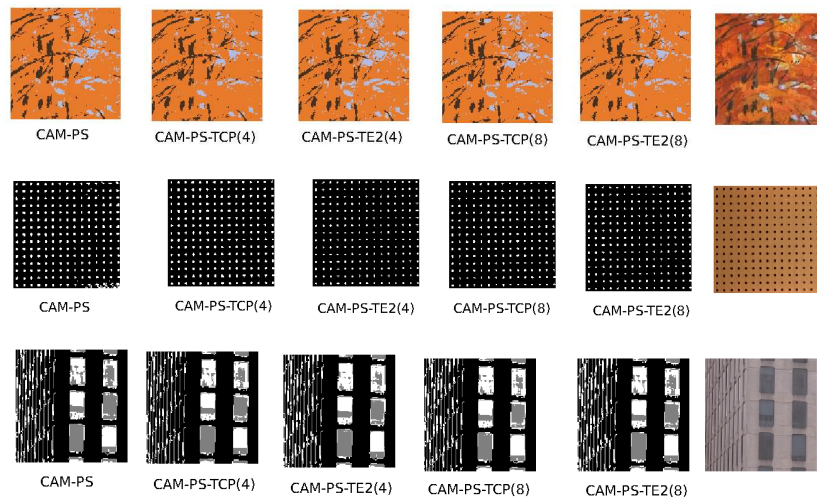


Figura 13. Sementaciones supervisada para 3 o Paintings, 11 o Tile-00091 y 5 o Buildings.

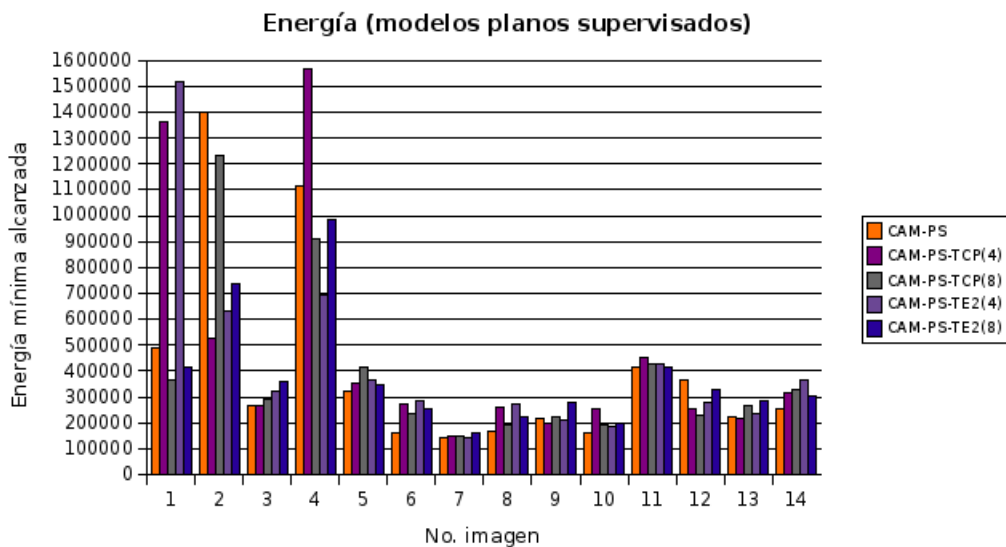


Figura 14. Energía mínima alcanzada por los modelos supervisados en cada imagen de prueba.

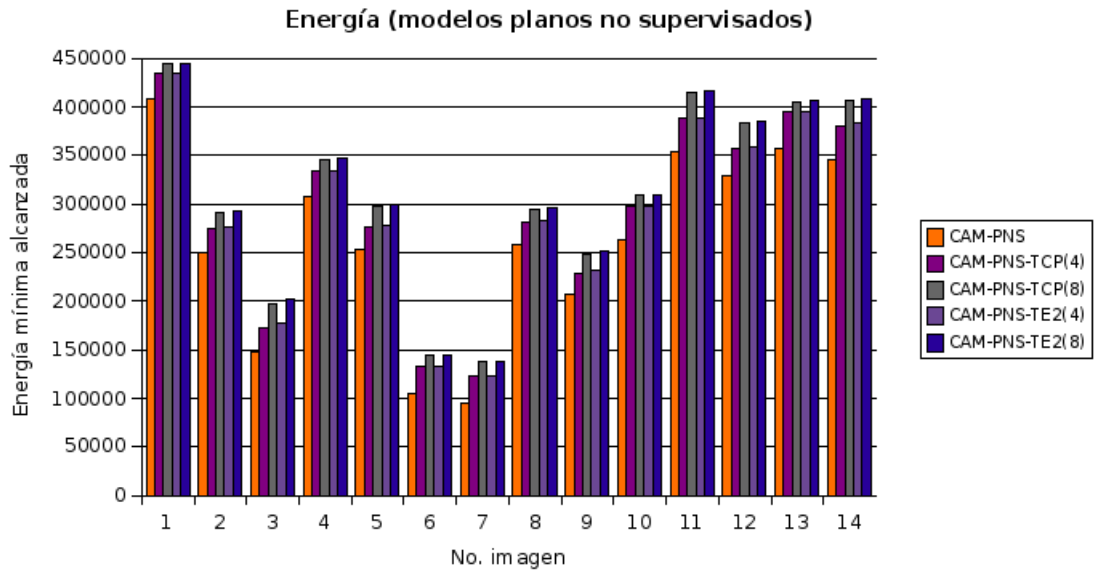


Figura 15. Energía mínima alcanzada por los modelos no supervisados en cada imagen de prueba.

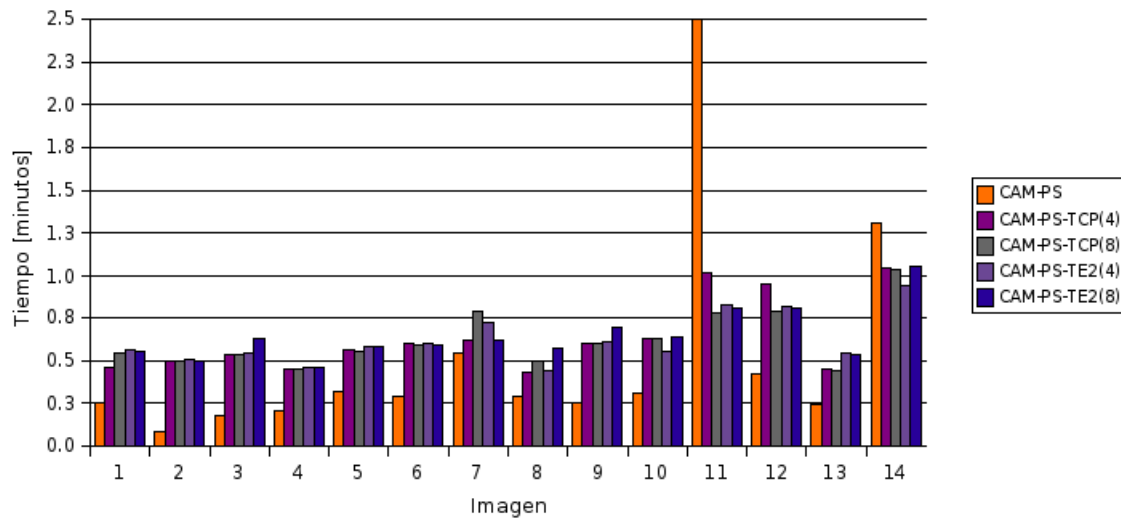


Figura 16. Tiempo de procesamiento (supervisado planos).



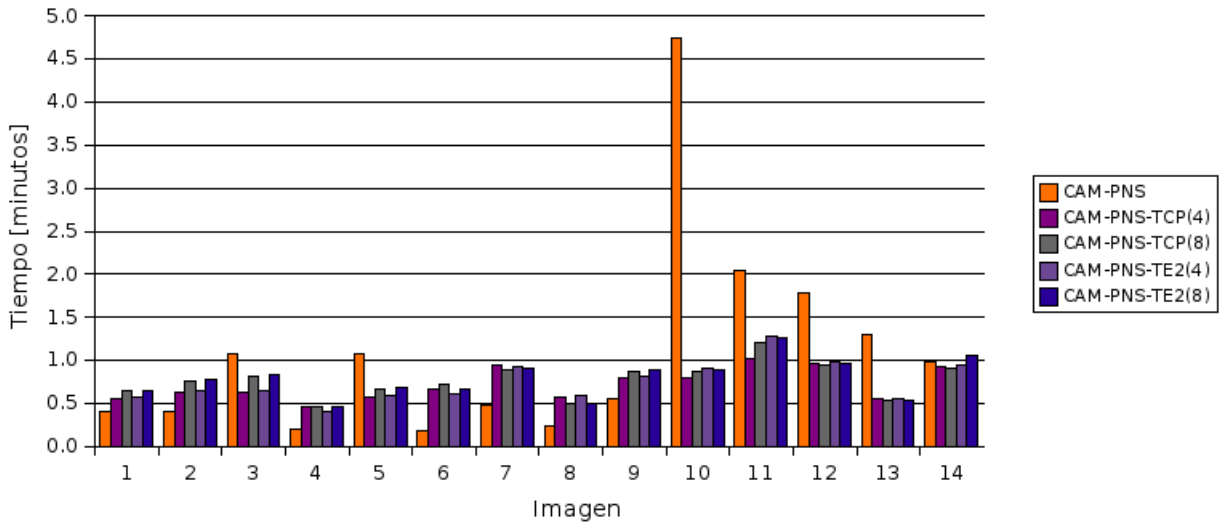


Figura 17. Tiempo de procesamiento (no supervisados planos).

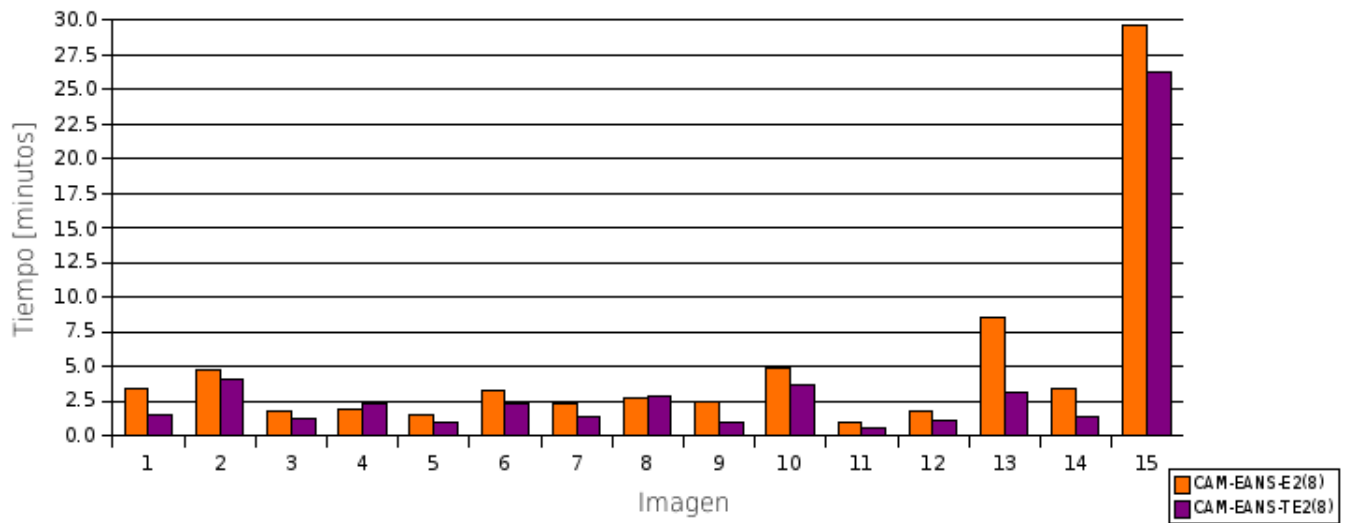


Figura 18. Tiempo de procesamiento para modelo no supervisados con estructura de árbol.